第 2 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σとその性質

1　[1]　恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ。

[2]　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　1，1+2，1+2+3，……

(2)　1，1+2，$1+2+2^2$，……

(3)　$1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……

Point Pickup

[1]　恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において，$k=1$，$k=2$，……，$k=n$ として辺々加える。

[2]　数列 $\{a_n\}$ の第 k 項 a_k を k の式で表し，$\sum_{k=1}^{n} a_k$ を計算する。

$\sum_{k=1}^{n} a_k$ の計算においては，a_k に含まれる k 以外の文字は定数とみなす。

第 2 講　PART1　確認問題

1　恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ のとき　$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

これらの式を辺々加えると

$$\boxed{ア}=\boxed{イ}\sum_{k=1}^{n}k^3+\boxed{ウ}\sum_{k=1}^{n}k^2+\boxed{エ}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\boxed{オ}$$

$$=\boxed{イ}\sum_{k=1}^{n}k^3+\boxed{ウ}\cdot\boxed{カ}+\boxed{エ}\cdot\boxed{キ}+\boxed{ク}$$

したがって

$$\boxed{イ}\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\boxed{ケ}\right)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$

$$=\boxed{コ}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

[ア の選択肢]

① n^4　② n^4-1

③ $(n+1)^4$　④ $(n+1)^4-1$

⑤ $\sum_{k=1}^{n} k^4-1$　⑥ $\sum_{k=1}^{n}(k+1)^4-1$

[オ ～ コ の選択肢]

① 1　② n　③ $n+1$

④ $n-1$　⑤ n^2　⑥ n^2+1

⑦ $(n+1)^2$　⑧ $n^2(n+1)^2$　⑨ $\dfrac{1}{2}n(n+1)$

⑩ $\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

2 2，2+4，2+4+6，……

$$\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}n\left(n+\boxed{\text{ス}}\right)\left(n+\boxed{\text{セ}}\right)$$

（ただし， ス ＜ セ とする）

3 2，2+4，2+4+8，……

$$\boxed{\text{ソ}}^{n+\boxed{\text{タ}}}-\boxed{\text{チ}}n-\boxed{\text{ツ}}$$

4 $2\cdot n$，$4\cdot(n-1)$，$6\cdot(n-2)$，……

$$\frac{\boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}n\left(n+\boxed{\text{ナ}}\right)\left(n+\boxed{\text{ニ}}\right)$$

（ただし， ナ ＜ ニ とする）

【MEMO】

第 2 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σとその性質

1　[1]　恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ。

[2]　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　$1,\ 1+2,\ 1+2+3,\ \cdots\cdots$

(2)　$1,\ 1+2,\ 1+2+2^2,\ \cdots\cdots$

(3)　$1\cdot n,\ 2\cdot(n-1),\ 3\cdot(n-2),\ \cdots\cdots$

[1]　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ のとき　$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

これらの式を辺々加えると

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$

$$=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$

$$=n^2(n+1)^2$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

［2］ 与えられた数列の第 k 項を a_k，求める和を S_n とする。

(1) $a_k=1+2+3+\cdots\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2) $a_k=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\dfrac{1\cdot(2^k-1)}{2-1}=2^k-1$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^k-1)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

(3) $a_k=k(n-k+1)=-k^2+(n+1)k$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-k^2+(n+1)k\}$$

$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

第 2 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：4，ウ：6，エ：4，オ：①，
カ：⑩，キ：⑨，ク：②，ケ：③，コ：⑧

[解説]

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ のとき　$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

これらの式を辺々加えると

$$\begin{aligned}(n+1)^4-1&=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&\qquad+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n\end{aligned}$$ [A]

したがって

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)\\&\qquad-2n(n+1)-(n+1)\\&=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}\\&=n^2(n+1)^2\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

[A]　和の公式

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$（$c$ は定数）

特に　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

2 [正解] サ：1，シ：3，ス：1，セ：2

[解説]

与えられた数列の第k項を a_k, 求める和を S_n とする。

$$a_k=2+4+6+\cdots\cdots+2k=\frac{k}{2}(2+2k) \quad \text{[B]}$$

$$=k(k+1)$$

[B]　初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

3 [正解] ソ：2，タ：2，チ：2，ツ：4

[解説]

与えられた数列の第k項を a_k, 求める和を S_n とする。

$$a_k=2+4+8+\cdots\cdots+2^k=\frac{2\cdot(2^k-1)}{2-1} \quad \text{[C]}$$

$$=2^{k+1}-2$$

[C]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，$r\neq1$ のとき

$$S_n=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}(2^{k+1}-2)$$

$$=\frac{4\cdot(2^n-1)}{2-1}-2n=\boldsymbol{2^{n+2}-2n-4} \quad \text{[C]}$$

4 **[正解]** テ：1，ト：3，ナ：1，ニ：2

[解説]

与えられた数列の第k項を a_k, 求める和を S_n とする。

$$a_k=2k(n-k+1)=-2k^2+2(n+1)k$$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\{-2k^2+2(n+1)k\}$$ [D]

$$=-2\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+2(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$ [A]

$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+6(n+1)\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

[D]　k 以外の文字は定数とみなす。